

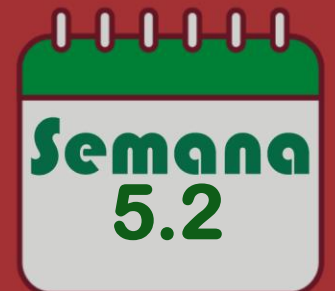


ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024 - I**

Trigonometría

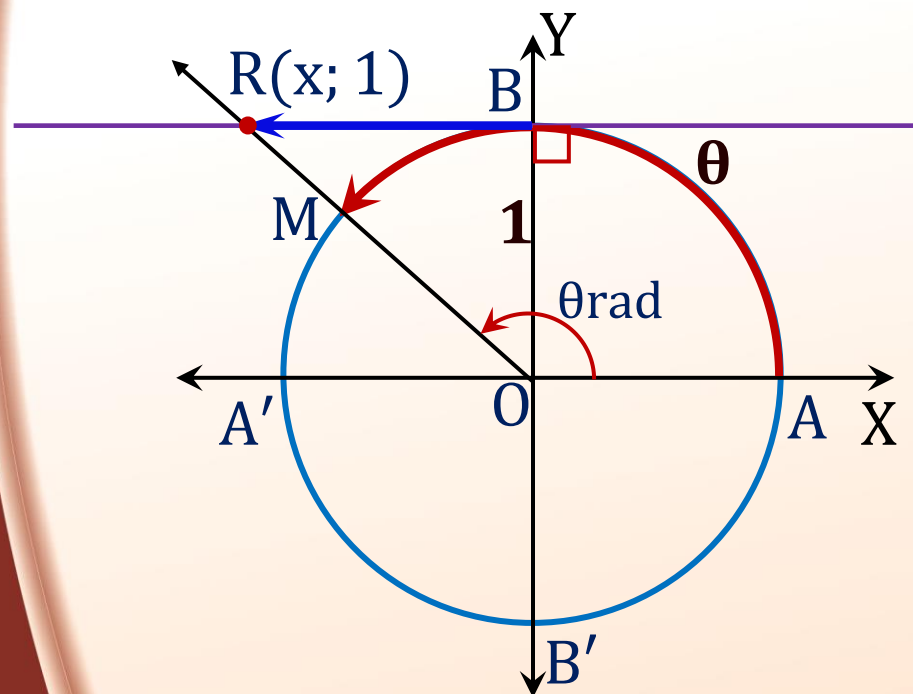
**CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA II:
LÍNEA COTANGENTE, LÍNEA SECANTE,
LÍNEA COSECANTE**



Línea trigonométrica cotangente

Es el segmento dirigido desde el origen de complementos B, al punto de intersección de la recta tangente a la CT, en dicho punto, con la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco considerado.

En la circunferencia trigonométrica mostrada:



Vemos que: $\overbrace{\cot(\theta \text{ rad})}^{\cot(\theta)} = \frac{x}{1}$

$$\cot(\theta) = x$$

Tenemos que: $\overrightarrow{BR} = \cot(\theta)$

Observación:

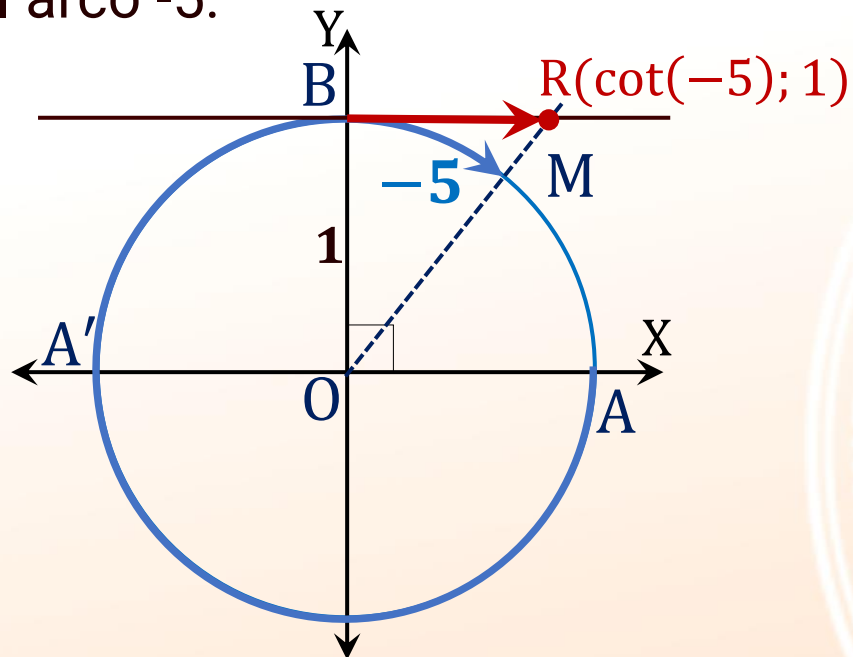
Para todo $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $\cot(\theta)$ sí está definida.

Nota:

La cotangente de un arco, es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente al origen de complementos y la prolongación de la recta que une el origen de coordenadas y el extremo del arco mencionado.

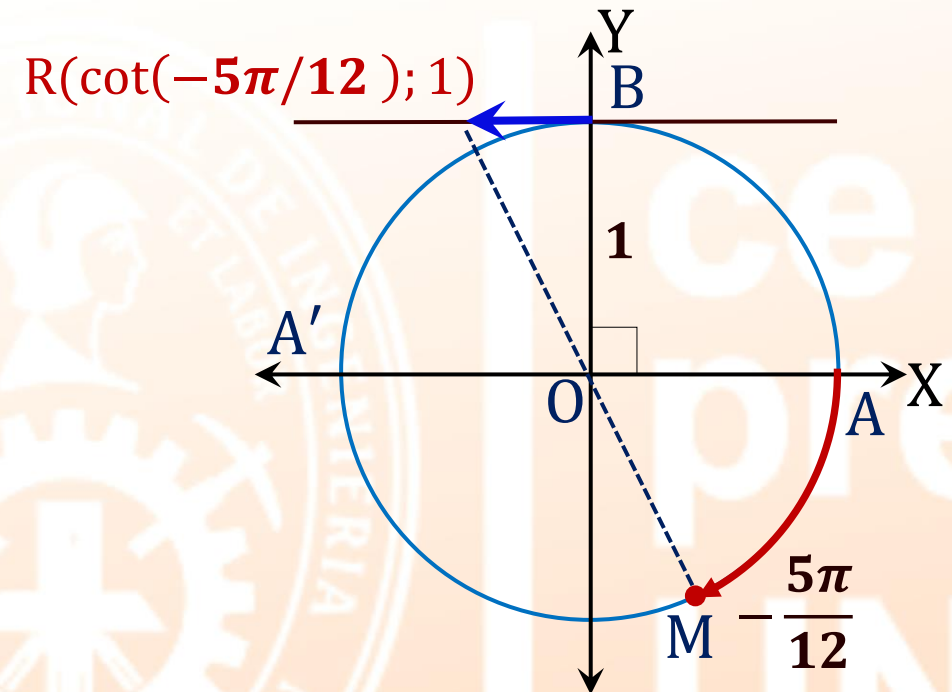
Ejemplos:

Grafiquemos la línea cotangente del arco -5 :



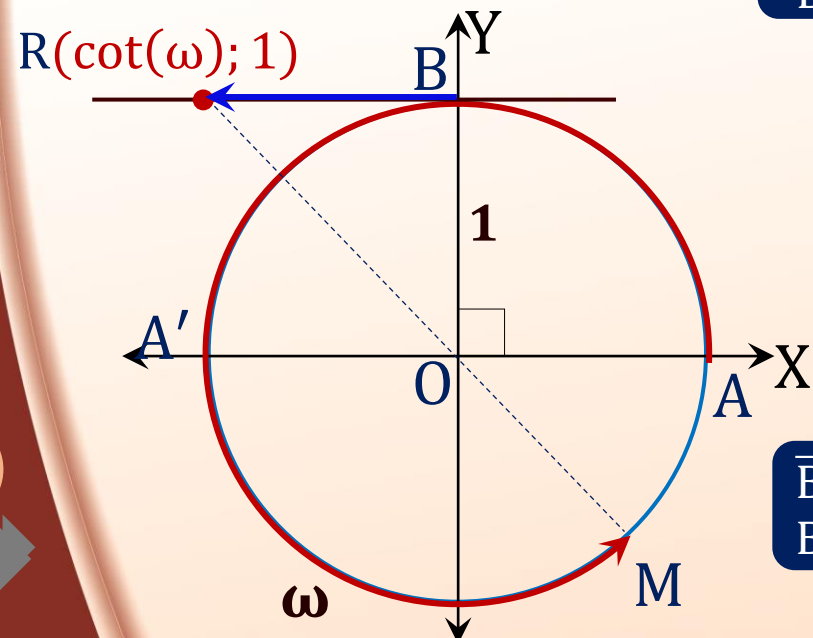
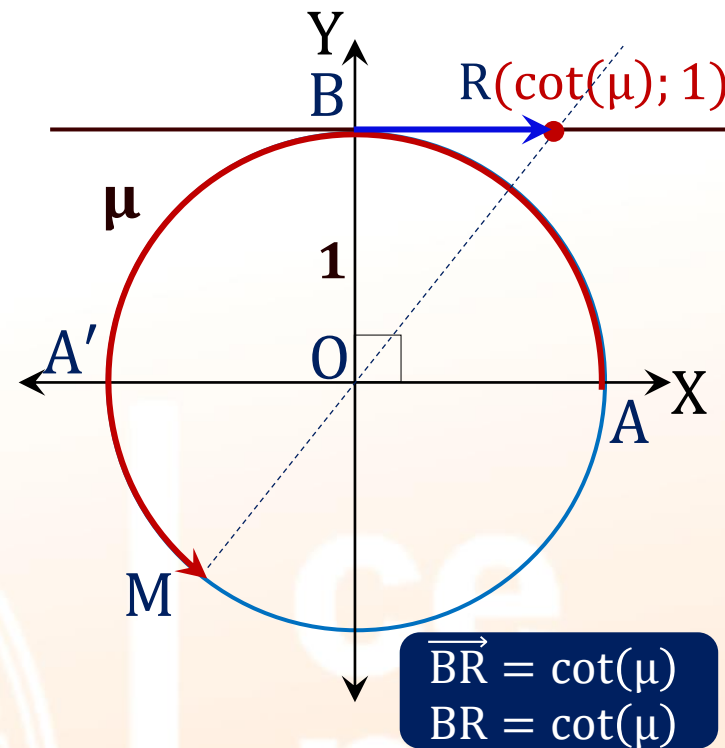
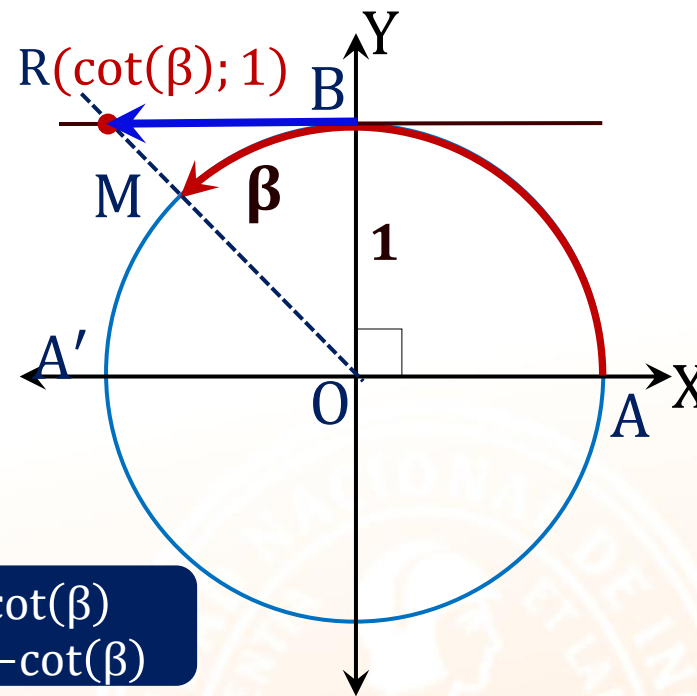
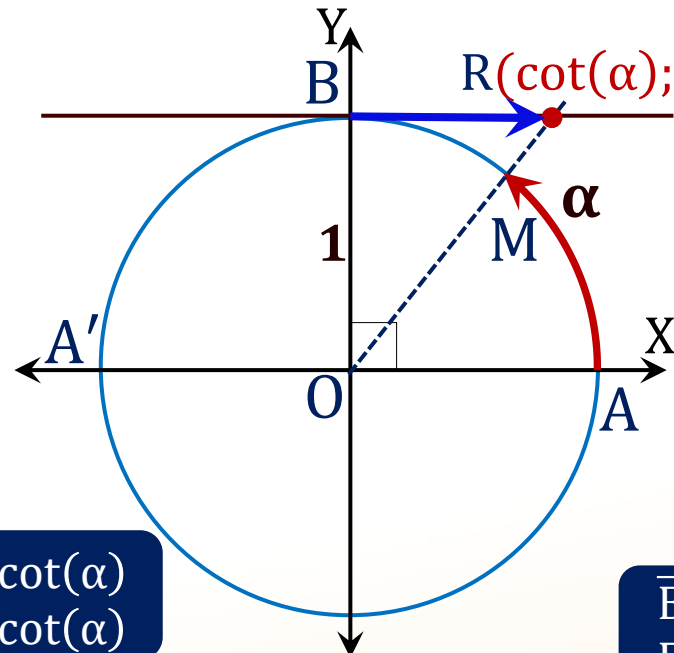
$$\overrightarrow{BR} = \cot(-5) \quad BR = \cot(-5)$$

Grafiquemos la línea cotangente del arco $-5\pi/12$:



$$\overrightarrow{BR} = \cot\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad BR = -\cot\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

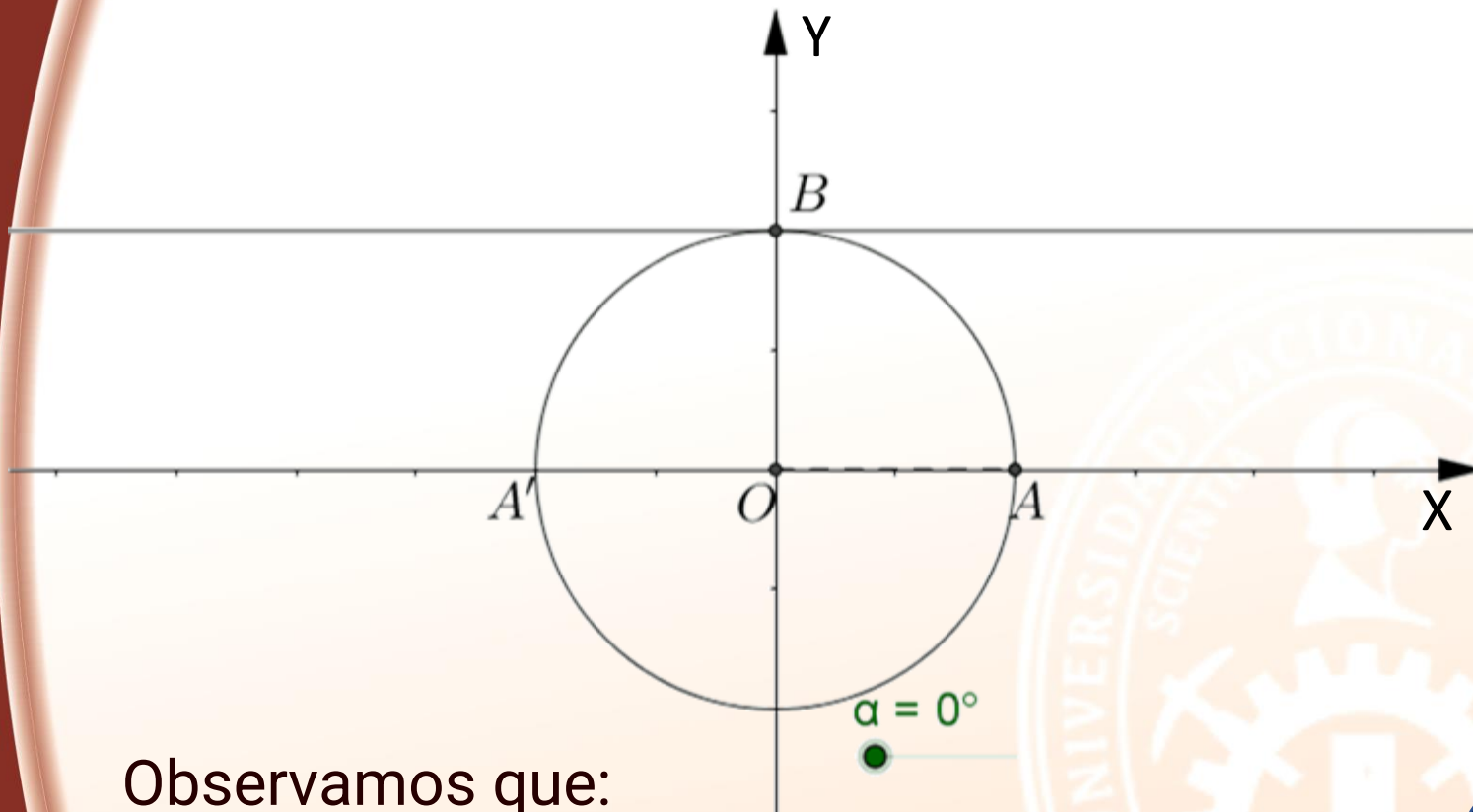
Grafiquemos la líneas cotangentes para cada cuadrante:



El segmento orientado que parte de B al punto de intersección de la prolongación del radio y la recta tangente a la C.T., es la **línea cotangente** del arco.

Variación numérica de la línea cotangente:

Analizaremos para $\theta \in [0; 2\pi]$:



Observamos que:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}: -\infty < \cot(\theta) < +\infty$$

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cot(\theta) < +\infty$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \Rightarrow -\infty < \cot(\theta) \leq 0$$

$$\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cot(\theta) < +\infty$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi \Rightarrow -\infty < \cot(\theta) \leq 0$$

APLICACIÓN 1

Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda en cada caso:

I. $\cot(\sqrt{2}) < \cot(\sqrt{6})$

II. $\cot(1) < \cot(2 + \sqrt{3})$

III. $\cot(4 + \sqrt{2}) < \cot(4 - \sqrt{2})$

A)VVV
D)FFV

B)VVF
E)FVF

C)FFF



APLICACIÓN 2

Si: $\theta \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{7\pi}{4} \right]$ y $a \leq 1 + 2\cot(\theta) \leq b$, calcule: $b(b + 2a)$

A) 5

B) 7

C) 9

D) 11

E) 12

APLICACIÓN 3

Determine la variación de: $2 - \cot\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right); \theta \in \left[\frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right]$

- A) $[-1; 1]$ B) $[1; 3]$ C) $\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$ D) $\mathbb{R} - \langle -1; 3 \rangle$ E) $\mathbb{R} - \langle 1; 3 \rangle$

APLICACIÓN 4

A partir de la figura mostrada, exprese el área de la región triangular sombreada en términos de θ (en u^2).

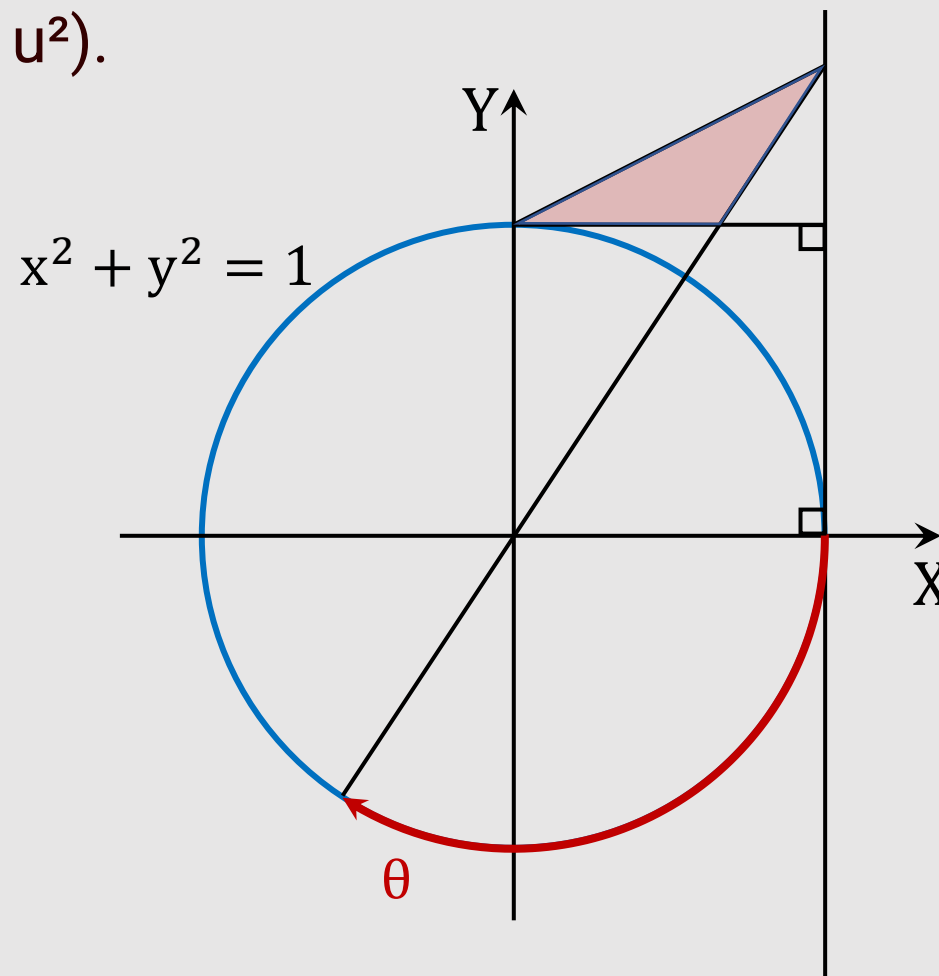
A) $0,5(1 + \cot(\theta))$

B) $0,5(1 - \cot(\theta))$

C) $0,5(\cot(\theta) - 1)$

D) $0,5(1 + \sec(\theta))$

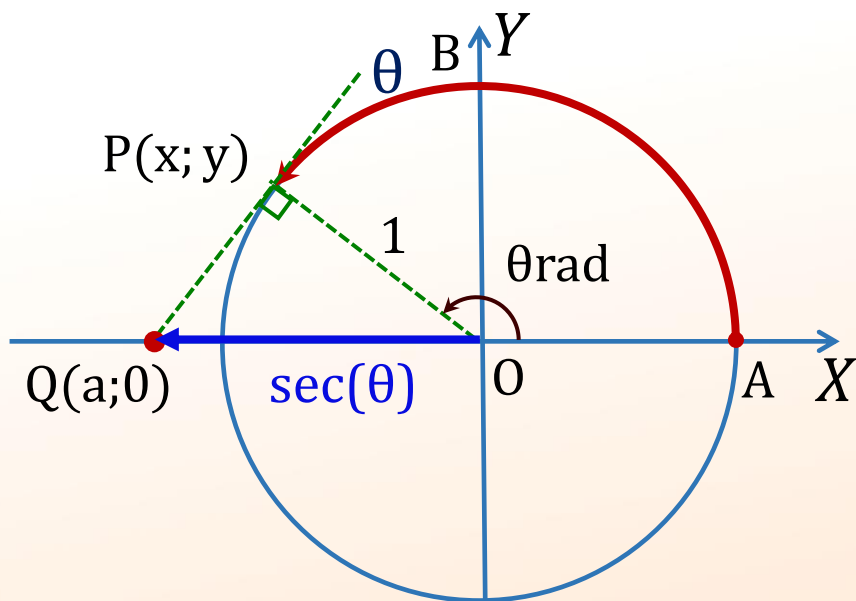
E) $0,5(1 + \csc(\theta))$


CLAVE: B

Línea trigonométrica secante

Es el segmento dirigido, desde el origen de coordenadas, al punto de intersección entre el eje X, con la recta tangente a la C.T. que pasa por el extremo del arco considerado.

En la circunferencia trigonométrica mostrada:



$\overrightarrow{OQ}$: línea secante

Sabemos que: $\overbrace{\sec(\theta \text{ rad})}^{\sec(\theta)} = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}, x \neq 0$

Dado que: $\overline{OP} \perp \overline{PQ} \Rightarrow m_{\overline{OP}} \cdot m_{\overline{PQ}} = -1$

$$\left(\frac{y}{x}\right) \left(\frac{y}{x-a}\right) = -1 \Rightarrow \frac{1}{x} = a$$

$$\sec(\theta) = a$$

Tenemos que:

$$\overrightarrow{OQ} = \sec(\theta)$$

Consideración:

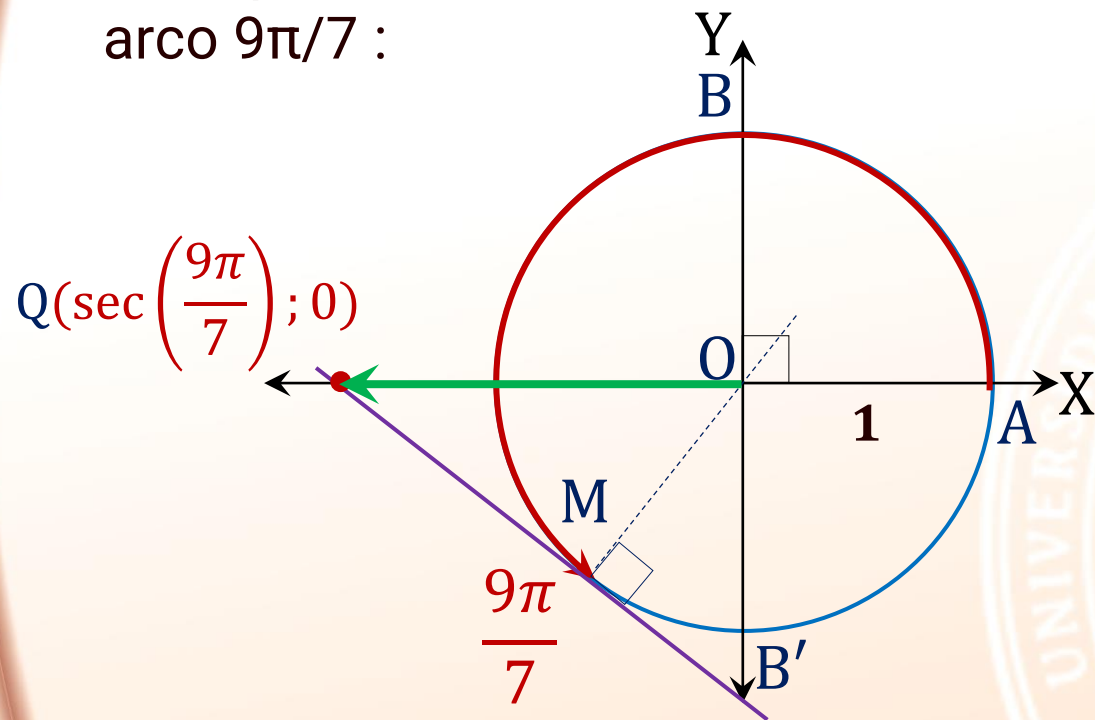
Para todo $\theta \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\sec(\theta)$ sí está definida.

Nota:

La secante de un arco, es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente al extremo del arco mencionado y el eje de las abscisas.

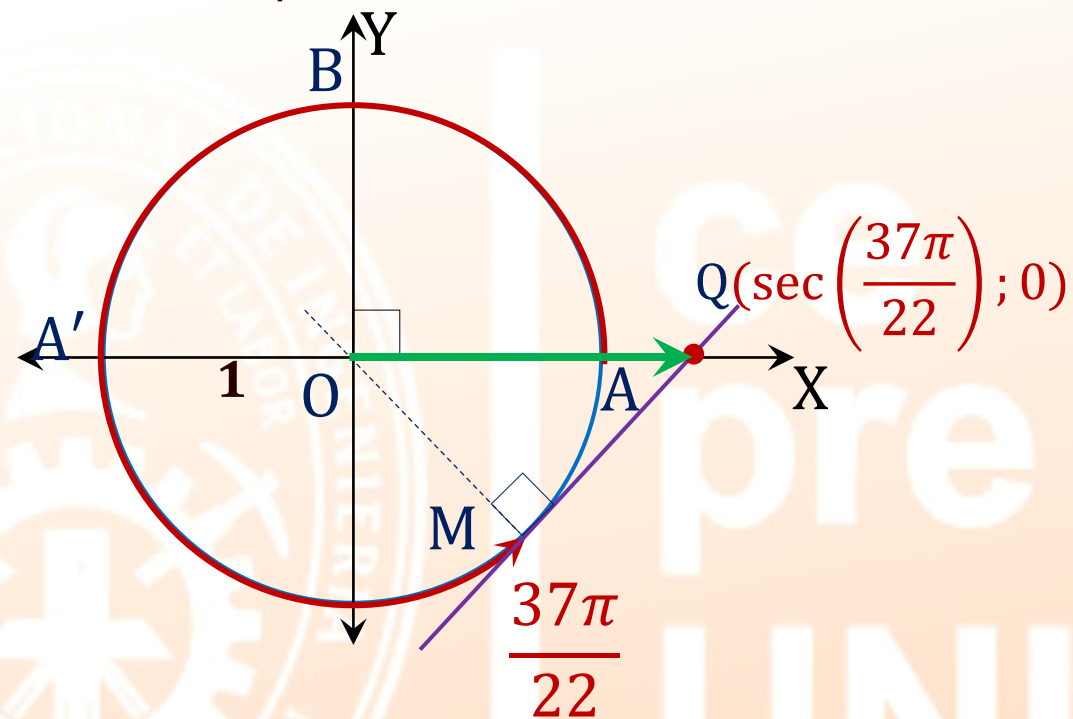
Ejemplos:

Grafiquemos la línea secante del arco $9\pi/7$:



$$\overrightarrow{OQ} = \sec\left(\frac{9\pi}{7}\right) \quad OQ = -\sec\left(\frac{9\pi}{7}\right)$$

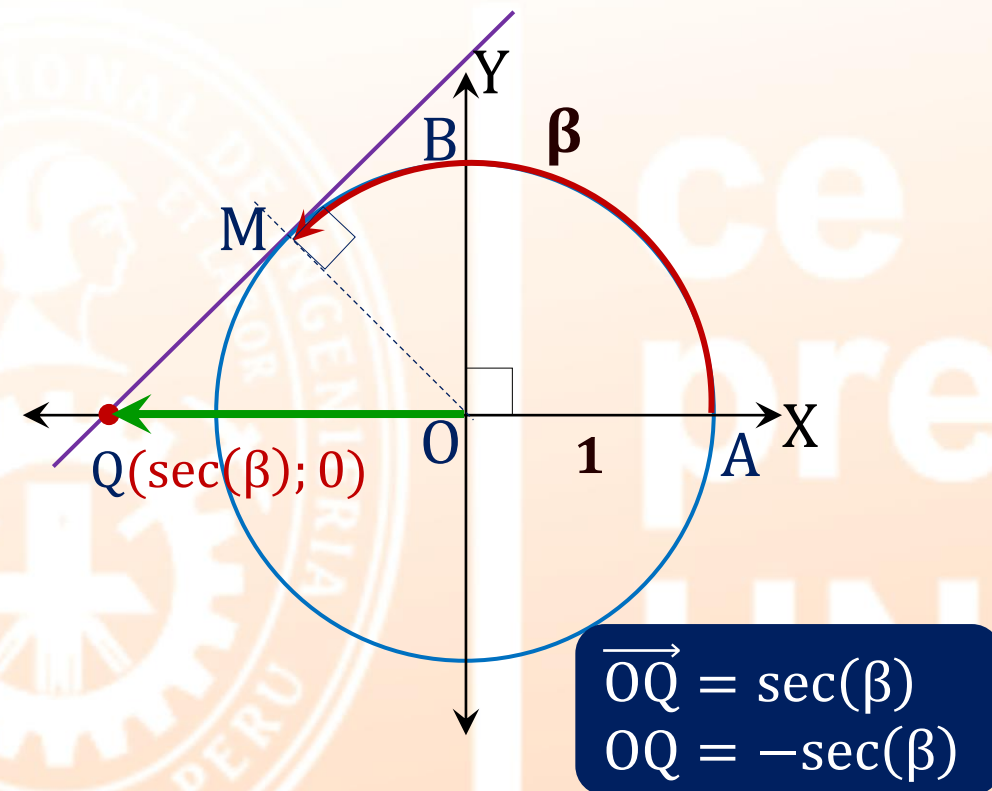
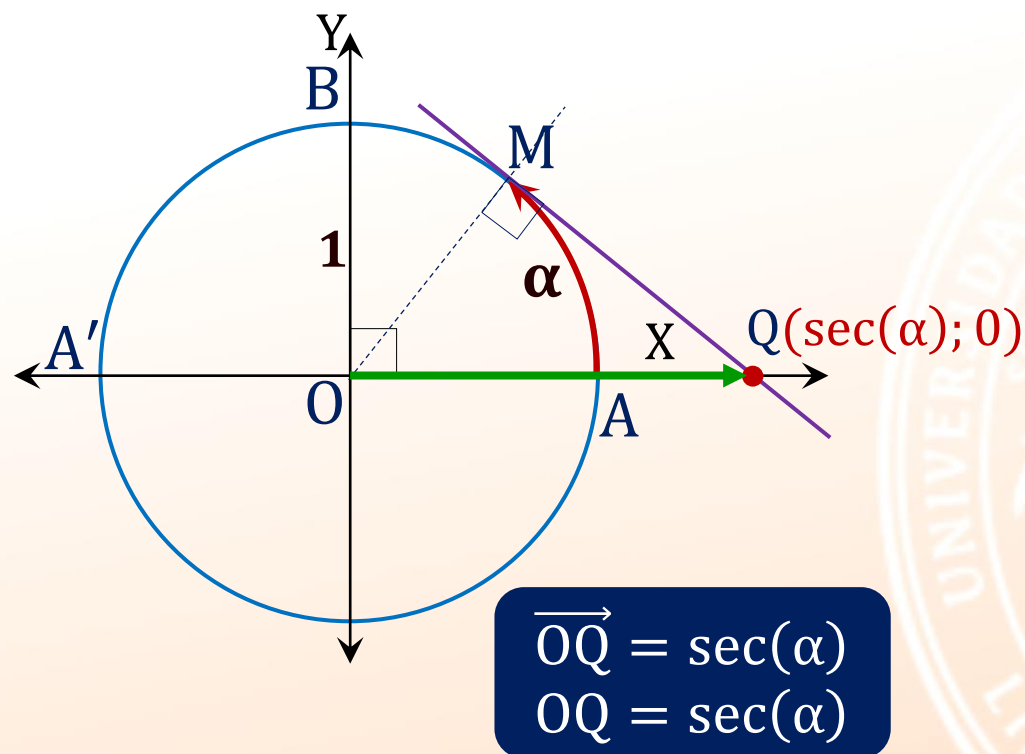
Grafiquemos la línea secante del arco $37\pi/22$:

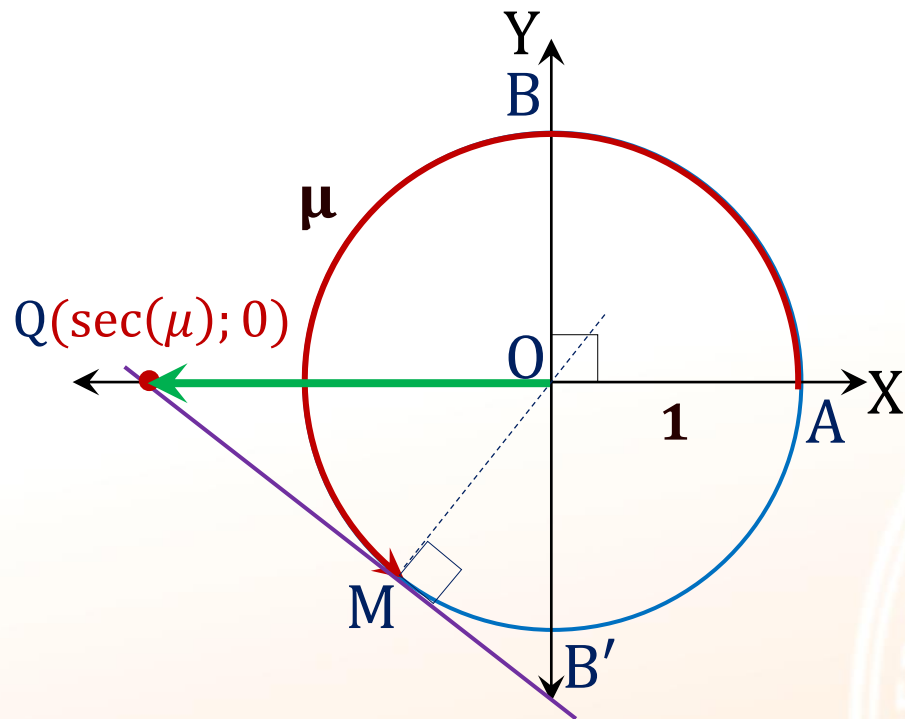


$$\overrightarrow{OQ} = \sec\left(\frac{37\pi}{22}\right) \quad OQ = \sec\left(\frac{37\pi}{22}\right)$$

El segmento orientado que parte del origen de coordenadas al punto de intersección de la recta tangente a la C.T. en el extremo del arco con el eje X, es la **línea secante** del arco.

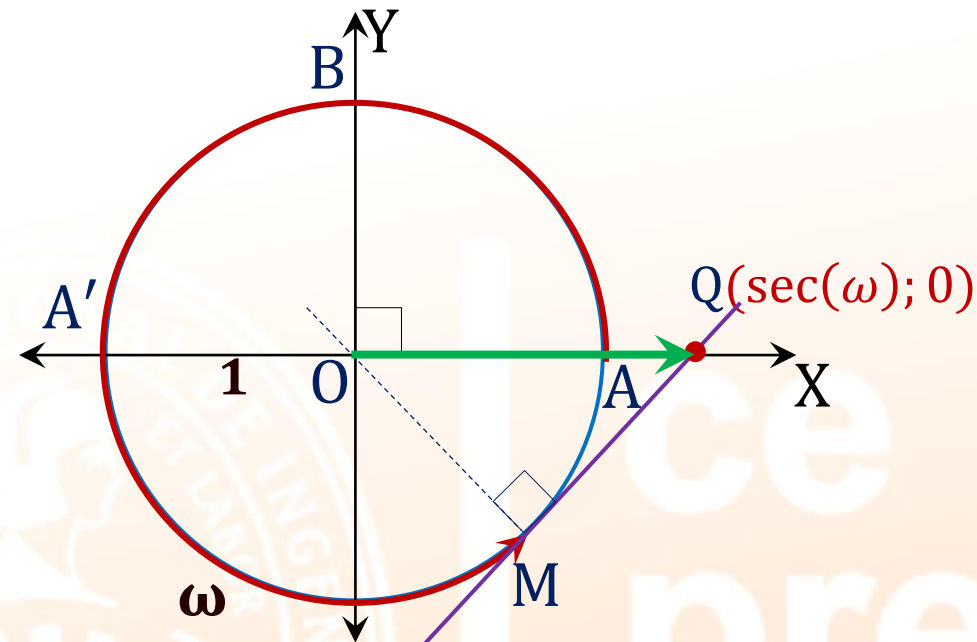
Grafiquemos las líneas secantes para cada cuadrante:





$$\overrightarrow{OQ} = \sec(\mu)$$

$$OQ = -\sec(\mu)$$

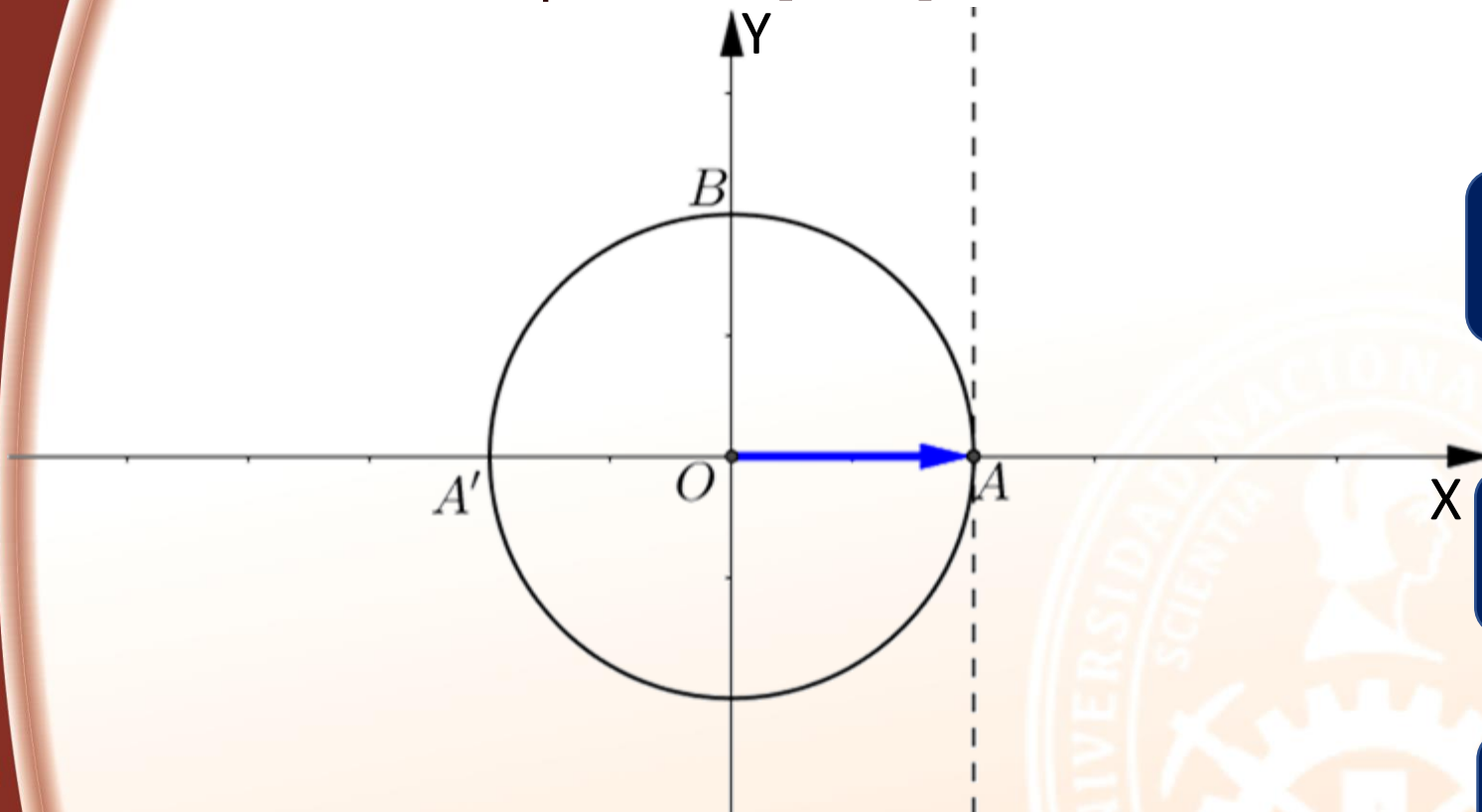


$$\overrightarrow{OQ} = \sec(\omega)$$

$$OQ = \sec(\omega)$$

Variación numérica de la línea secante:

Analizaremos para $\theta \in [0; 2\pi]$:



$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \leq \sec(\theta) < +\infty$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow -\infty < \sec(\theta) \leq -1$$

$$\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\infty < \sec(\theta) \leq -1$$

$$\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi \Rightarrow 1 \leq \sec(\theta) < +\infty$$

Observamos que:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} - \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} : -\infty < \sec(\theta) \leq -1 \vee 1 \leq \sec(\theta) < +\infty$$

$$|\sec(\theta)| \geq 1$$

APLICACIÓN 05

Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda en cada caso:

- I. $\sec(2) < \sec(4)$
- II. $\sec(1) < \sec(5)$
- III. $\sec(3,5) < \sec(4,5)$

A)VVV
D)VFV

B)VVF
E)FVV

C)VFF

CLAVE: B

APLICACIÓN 06

Si $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$, determine la variación de: $|2 \sec(\theta) + 3|$

A) $[1; 2]$ B) $[3; 4]$ C) $[0; 1]$ D) $[0; 2]$ E) $[2; 3]$ 

APLICACIÓN 07

Si la expresión $|\sec(\theta)| - \sqrt{2}$ asume valores no positivos, determine los valores de θ para $\theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

A) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$

B) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$

C) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$

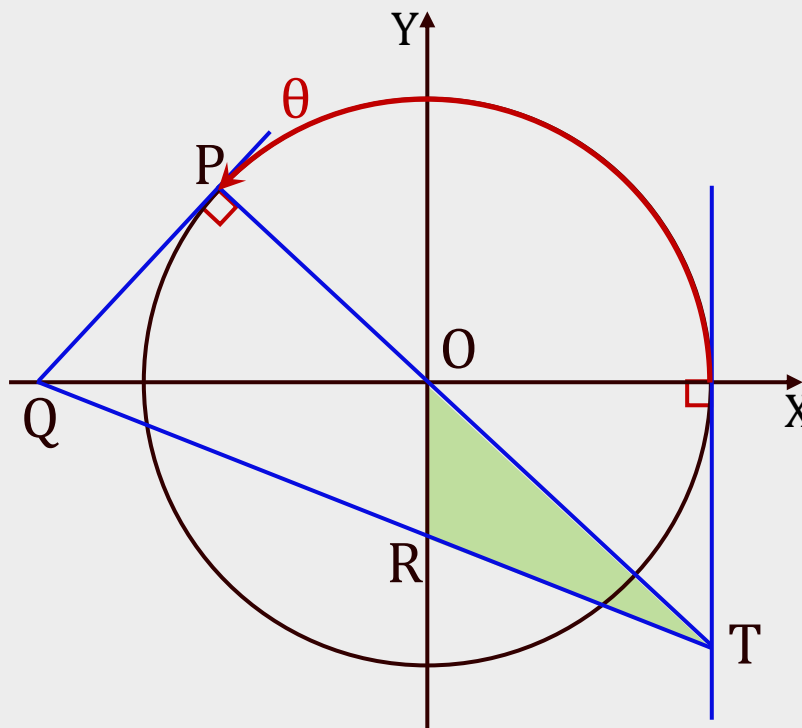
D) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right]$

E) $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \cup \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$

APLICACIÓN 08

En la circunferencia trigonométrica mostrada, determine la relación en la que se encuentran las áreas de las regiones triangulares QOR y ORT.

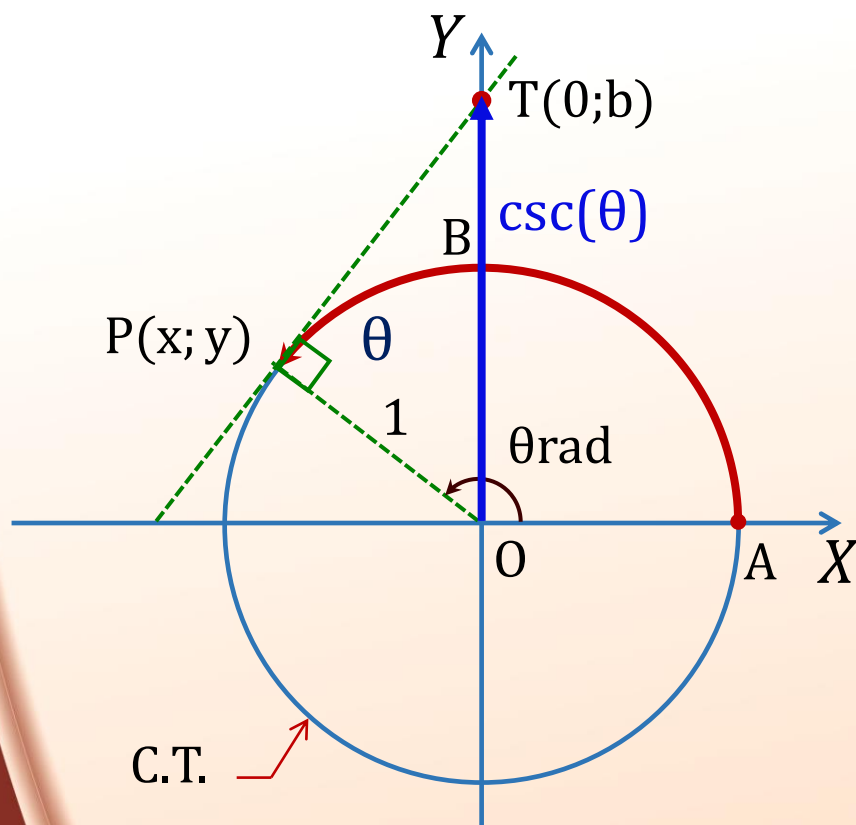
- A) $\sec(\theta) \tan(\theta)$
- B) $-\sec(\theta) \csc(\theta)$
- C) $-\sec(\theta) \sin(\theta)$
- D) $-\sec(\theta)$
- E) $\csc(\theta)$


CLAVE: D

Línea trigonométrica cosecante

Es el segmento dirigido, desde el origen de coordenadas, al punto de intersección entre el eje Y con la recta tangente a la C.T. que pasa por el extremo del arco considerado.

En la circunferencia trigonométrica mostrada:



Sabemos que: $\overbrace{\csc(\theta \text{ rad})}^{\csc(\theta)} = \frac{r}{y} = \frac{1}{y} \quad y \neq 0$

Dado que: $\overline{OP} \perp \overline{PT} \Rightarrow m_{\overline{OP}} \cdot m_{\overline{PT}} = -1$

$$\left(\frac{y}{x}\right) \left(\frac{y-b}{x}\right) = -1 \Rightarrow \frac{1}{y} = b \quad \boxed{\csc(\theta) = b}$$

Tenemos que:

$$\overrightarrow{OT} = \csc(\theta)$$

$\overrightarrow{OT}$: línea cosecante

Observación:

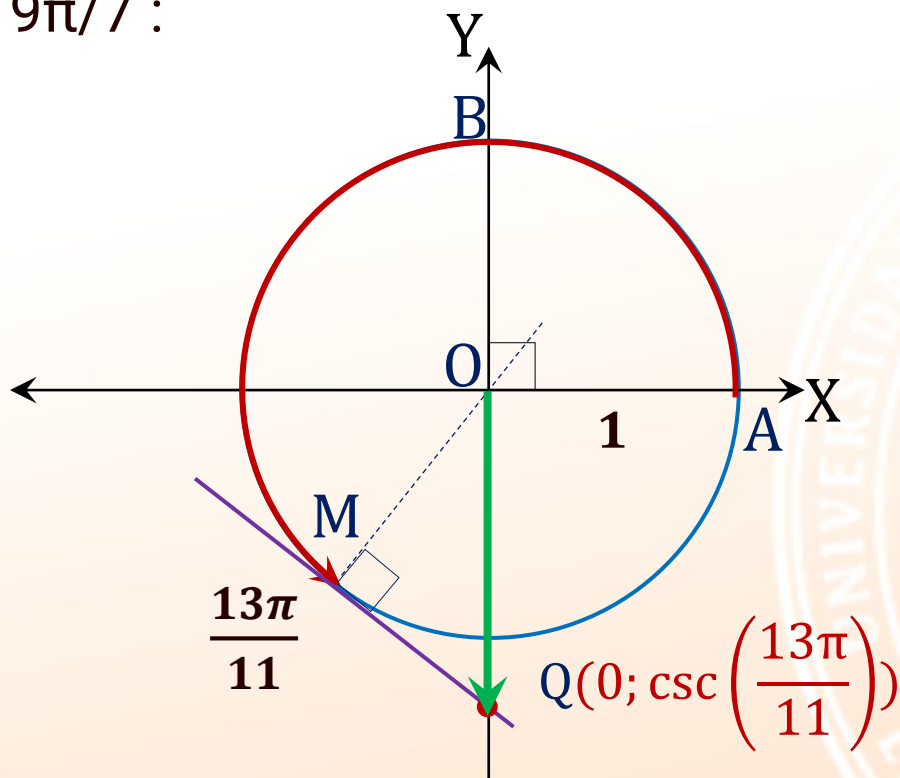
Para todo $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $\csc(\theta)$ si está definida.

Nota:

La cosecante de un arco, es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente al extremo del arco mencionado y el eje de las ordenadas.

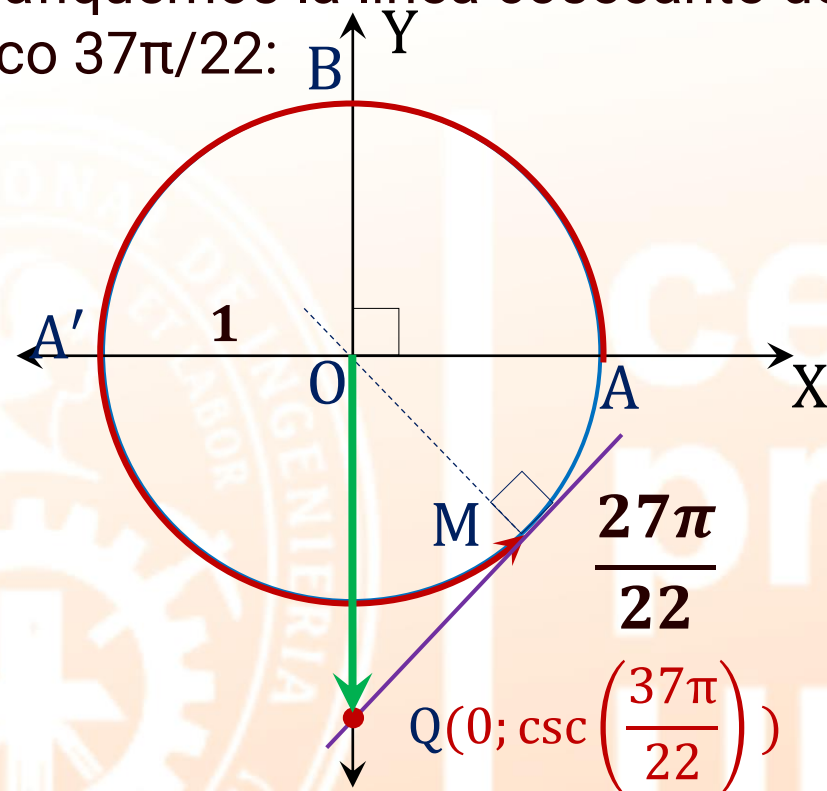
Ejemplos:

Grafiquemos la línea cosecante del arco $9\pi/7$:



$$\overrightarrow{OQ} = \csc\left(\frac{13\pi}{11}\right) \quad OQ = -\csc\left(\frac{13\pi}{11}\right)$$

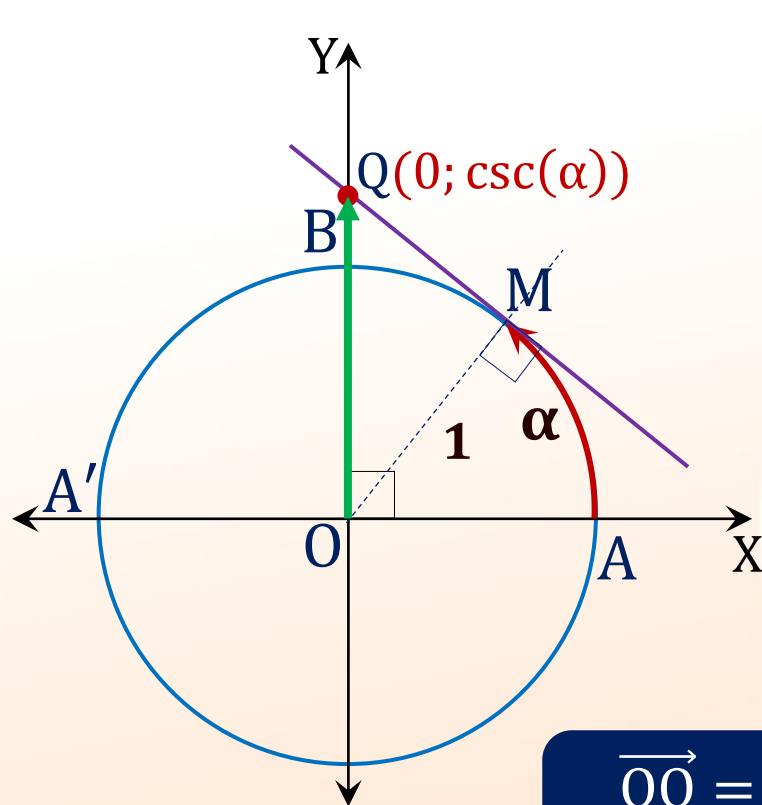
Grafiquemos la línea cosecante del arco $37\pi/22$:



$$\overrightarrow{OQ} = \csc\left(\frac{37\pi}{22}\right) \quad OQ = -\csc\left(\frac{37\pi}{22}\right)$$

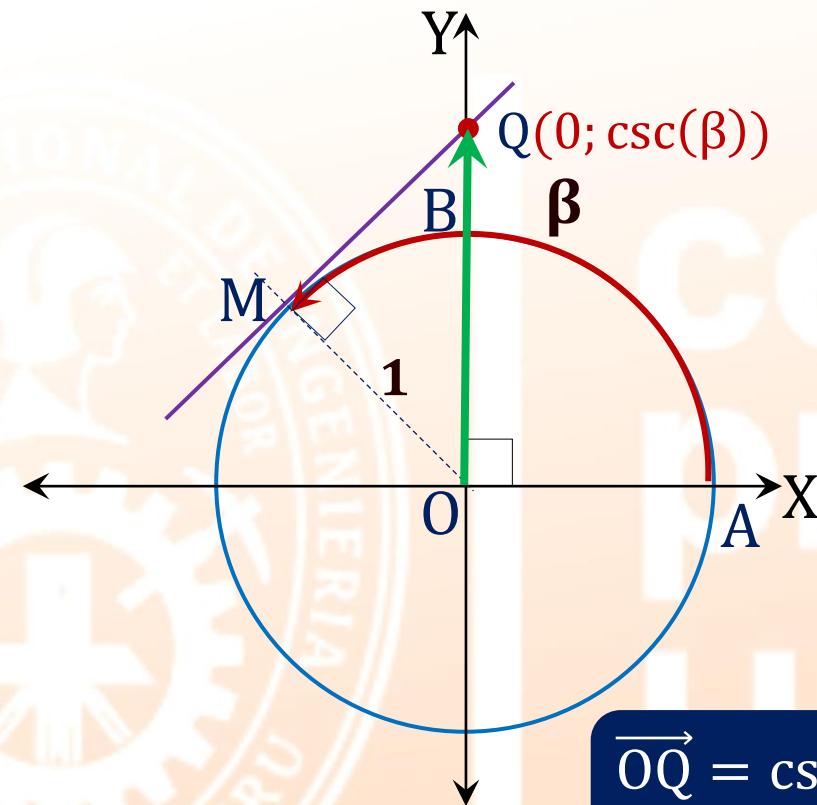
El segmento orientado que parte del origen de coordenadas al punto de intersección de la recta tangente a la C.T. en el extremo del arco con el eje Y, es la **línea cosecante** del arco.

Grafiquemos las líneas cosecantes para cada cuadrante:



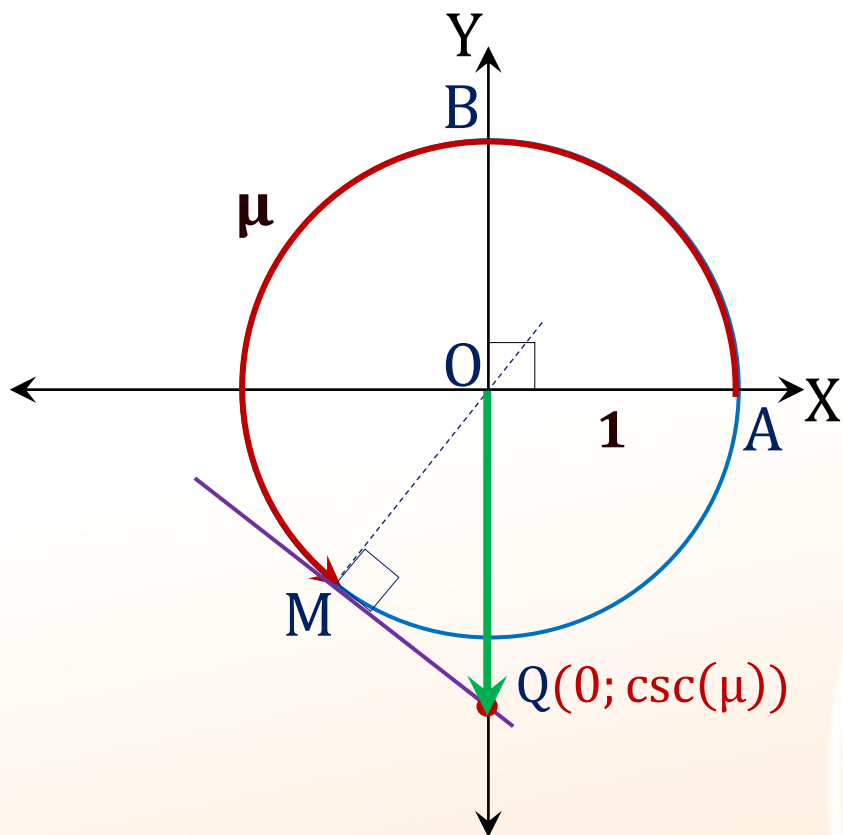
$$\overrightarrow{OQ} = \csc(\alpha)$$

$$OQ = \csc(\alpha)$$

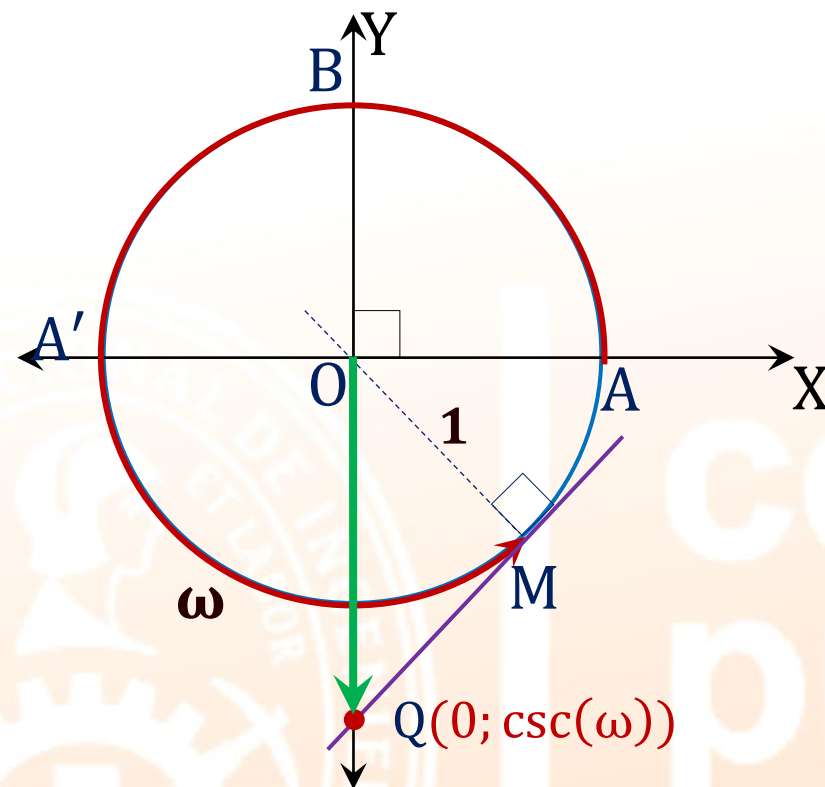


$$\overrightarrow{OQ} = \csc(\beta)$$

$$OQ = \csc(\beta)$$



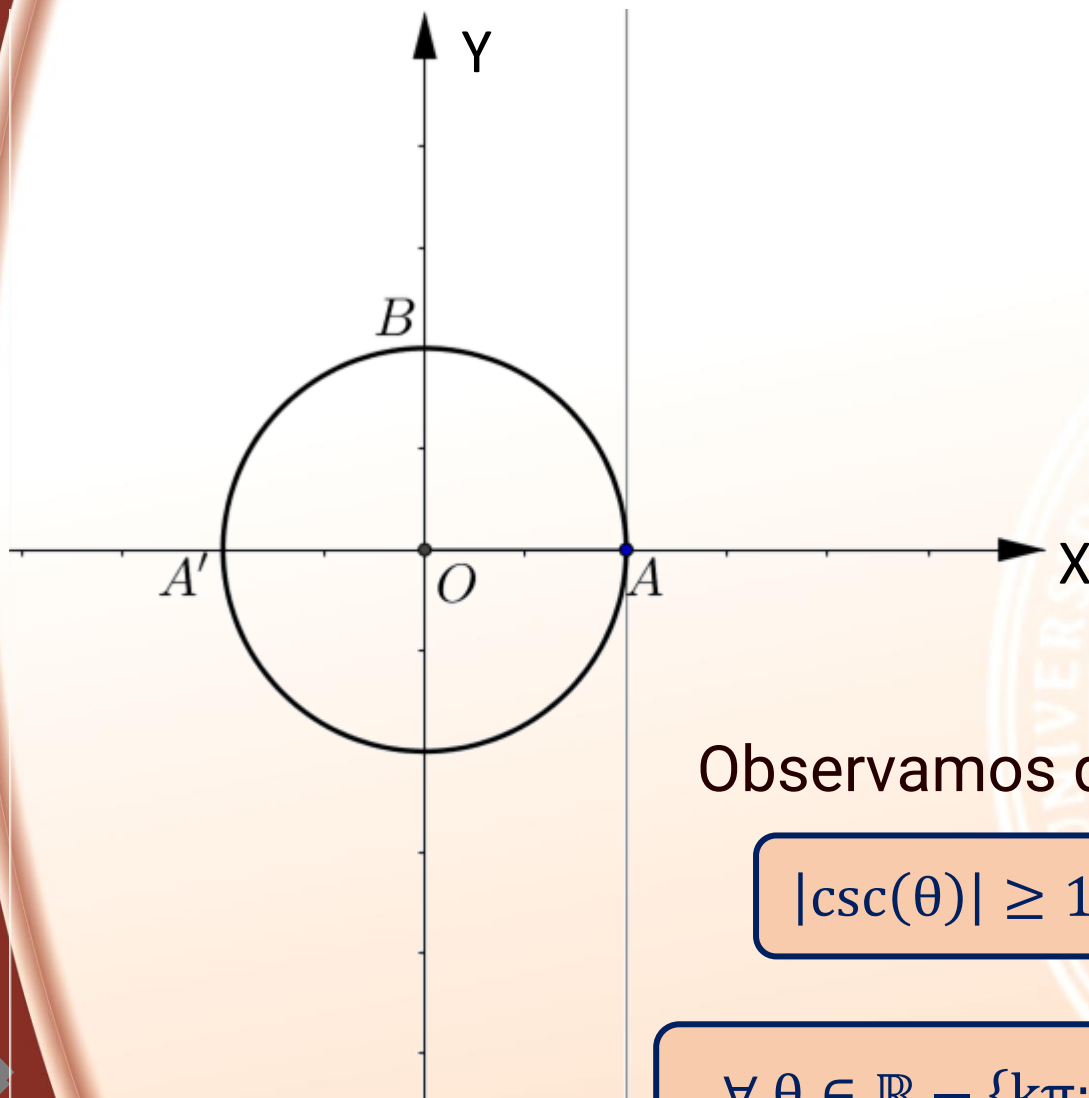
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \csc(\mu) \\ OQ &= -\csc(\mu)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \csc(\omega) \\ OQ &= -\csc(\omega)\end{aligned}$$

Variación numérica de la línea cosecante:

Analizaremos para $\theta \in [0; 2\pi]$:



$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \leq \csc(\theta) < +\infty$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \Rightarrow 1 \leq \csc(\theta) < +\infty$$

$$\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\infty < \csc(\theta) \leq -1$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi \Rightarrow -\infty < \csc(\theta) \leq -1$$

Observamos que:

$$|\csc(\theta)| \geq 1$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}: -\infty < \csc(\theta) \leq -1 \vee 1 \leq \csc(\theta) < +\infty$$

APLICACIÓN 09

Si: $3\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$,
indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda en cada caso:

- I. $\csc(\theta_1) < \csc(\theta_2)$
- II. $\csc(\theta_1) < \sec(\theta_2)$
- III. $\csc(\theta_1) < \cot(\theta_1)$

- A) VFV
- B) VVF
- C) FFV
- D) FVV
- E) FVF

CLAVE: D

APLICACIÓN 10

Si $\pi/2 < \theta < \pi$, determine la variación de:

$$\csc\left(\frac{\pi}{4}\text{sen}(\theta)\right).$$

- A) $\langle -\infty; -1 \rangle$
- B) $\langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle$
- C) $\langle -\sqrt{2}; -1 \rangle$
- D) $\langle 1; \sqrt{2} \rangle$
- E) $\langle \sqrt{2}; +\infty \rangle$

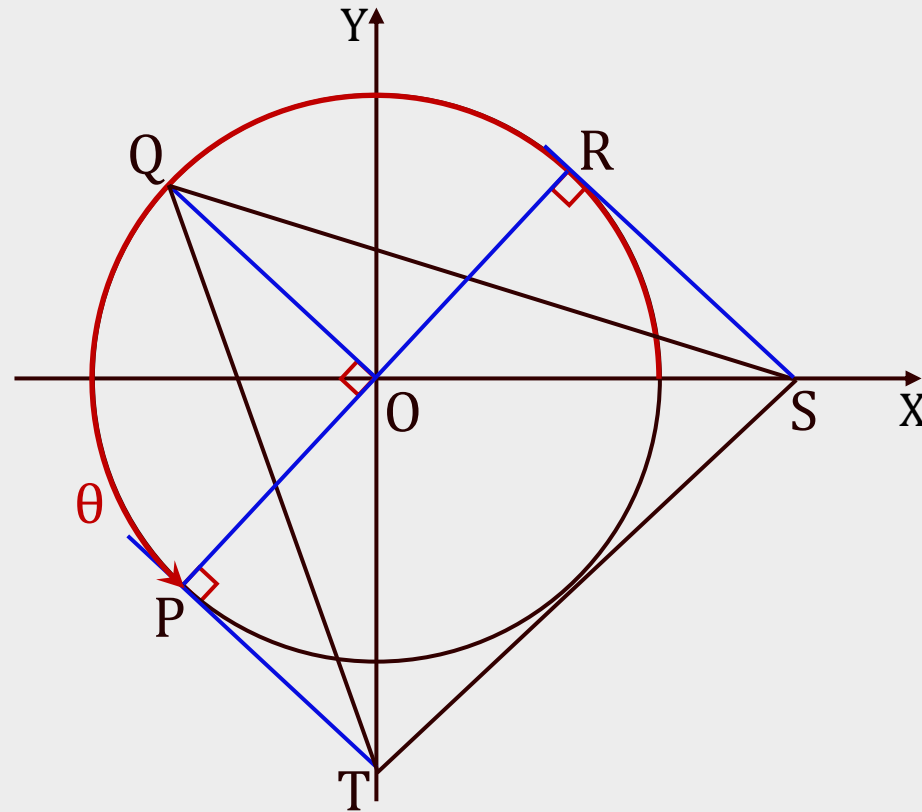
APLICACIÓN 11

Si $1 \leq |\csc(\theta)| \leq 2$, donde $-\pi < \theta < \pi$, determine la variación de θ .

- A) $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$
- B) $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$
- C) $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$
- D) $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{6}\right]$
- E) $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$

En la circunferencia trigonométrica mostrada, exprese el área de la región triangular TQS en términos de θ .

- A) $1 + \frac{1}{2} \sec(\theta) \tan(\theta)$
- B) $1 - \frac{1}{2} \sec(\theta) \csc(\theta)$
- C) $1 - \frac{1}{2} \sec(\theta) \sin(\theta)$
- D) $1 + \frac{1}{2} \sec(\theta) \csc(\theta)$
- E) $1 - \frac{1}{2} \sec(\theta) \tan(\theta)$



CLAVE: C

APLICACION 13

Calcule aproximadamente, el valor de:

$$\operatorname{sen}(11) + 2 \cos(11) + 3 \cot(11) + 4 \operatorname{csc}(11)$$

- A) -3 B) -4 C) -5
D) -6 E) -7

CLAVE: C

APLICACION 14

Dado: $1 < \tan(x) < 4$

Entonces x puede estar en el intervalo.....

- A) $\langle 5; 6 \rangle$
- B) $\langle 4; 5 \rangle$
- C) $\langle 3; 4 \rangle$
- D) $\langle 2; 3 \rangle$
- E) $\langle 1; 2 \rangle$

CLAVE: D

APLICACION 15

De las siguientes proposiciones;
¿Cuántas son verdaderas?

I. $\sec(\cos(x)) \geq \cos(\sec(x))$

II. $\csc(\sen(x)) \geq \sen(\csc(x))$

III. $\sec(\sen(x)) \geq \sen(\sec(x))$

IV. $\csc(\cos(x)) \geq \cos(\csc(x))$

- A) Solo I B) Solo I y II C) Solo III y IV
D) Solo III E) Solo II y IV

CLAVE: D

APLICACION 16

Ordenar en forma ascendente:

$$\tan(7), \cot(-8), \sec(6), \tan(-5)$$

A) $\tan(7), \cot(-8), \sec(6), \tan(-5)$

B) $\tan(7), \cot(-8), \sec(-5), \tan(6)$

C) $\tan(-5), \cot(7), \sec(6), \tan(-8)$

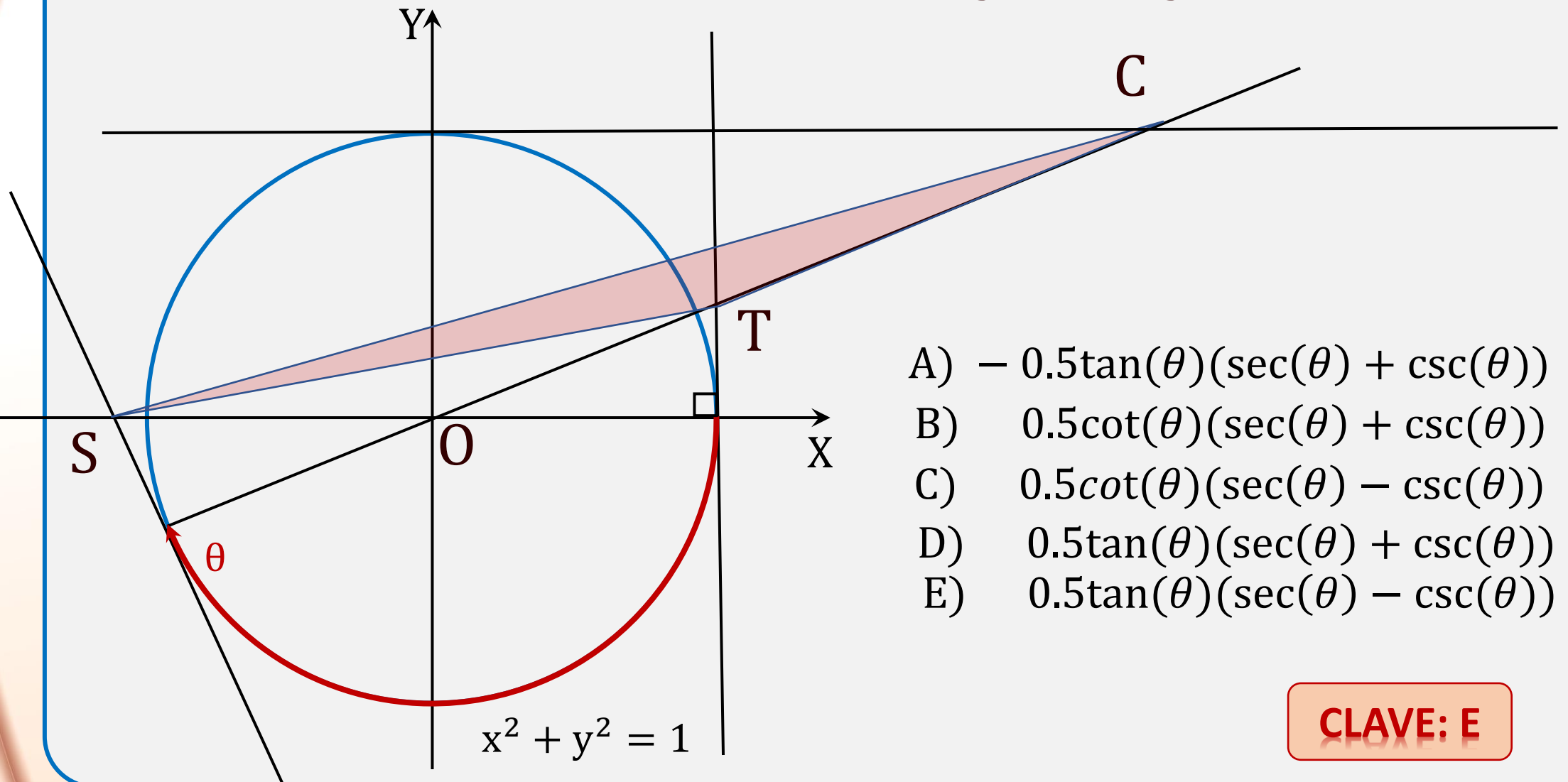
D) $\tan(-8), \cot(7), \sec(6), \tan(-5)$

E) $\tan(-5), \cot(6), \sec(7), \tan(-8)$

CLAVE: C

APLICACION 17

En la C.T. mostrada, determinar el área de la región triangular STC .



- A) $-0.5\tan(\theta)(\sec(\theta) + \csc(\theta))$
- B) $0.5\cot(\theta)(\sec(\theta) + \csc(\theta))$
- C) $0.5\cot(\theta)(\sec(\theta) - \csc(\theta))$
- D) $0.5\tan(\theta)(\sec(\theta) + \csc(\theta))$
- E) $0.5\tan(\theta)(\sec(\theta) - \csc(\theta))$

CLAVE: E

APLICACION 18

Sabiendo que:

$$-3 < x^2 - 4x < 0$$

De las siguientes proposiciones; ¿Cuáles son verdaderas?

I. $\tan(3) < \tan(x) < \tan(1)$

II. $\tan(1) < \tan(x) < \tan(2)$

III. $\tan(2) < \tan(x) < \tan(3)$

CLAVE: A

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) Solo I y II E) Solo II y III

ce
pre
UNI